جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الدوال محدودة التغير
الفصل الأول للعام 2014 /2015
السنة الثالثة - رياضيات

اسم الطالب :
الدرجة : 100
المدة : 90 دقيقة

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك : **(تمنع الآلة الحاسبة)**

(من 1 الى 7 لكل سؤال (12 درجة) و للسؤال الثامن (16 درجة))

1) أثبت ان الدالة f المستمرة مطلقاً على $[a,b]$ هي ذ ت م عليها ، وهل العكس صحيح ، وضح ذلك بمثال ؟ بدون حل.

2) أوجد دالة التغير للدالة $g(x)=\dfrac{1}{1+x}$ على الفترة $[0,3]$ ، ثم حقق من اجل g شرط ليبشيتز و ارسمها على نفس الفترة، مع ذكر خاصة الاستمرار لدالة التغير على $[0,3]$.

3) اكتب صيغة دالة القفز على $[a,b]$ لدالة h متزايدة عليها وهل هي قيوسة على نفس الفترة و لماذا ؟ ما نوع الفرق : $h(x)-J_h(x)$ من حيث الاستمرار بانتظام على $[a,b]$.

4) خذ $X=\{1,2,3,4\}$ و الصف $H=\{\Phi, X, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$ ، مع تبيان فيما إذا كان الصف H - تبولوجيا- جبر على X ، ثم اوجد اصغر جبر يحوي H . و علل هل الأخير جبر تام و صف مطرد ؟

5) تأكد من وجود تكامل ستيلجس : $J=\int_0^3 |x+1|\, d\,[V_g(x)]$ و احسبه في حال وجوده، حيث الدالة $V_g(x)$ هي دالة التغير التي اوجدتها ، في السؤال (2) أعلاه ، ثم بين ان الدالة $u(x)=|x|$ اشتقاقية تقريباً في كل مكان على الفترة $[-2,2]$.

6) لتكن $X=R$ ، $S=B(R)$ ، μ مقياس ليبيغ على R و $F_n=[n+1,\infty[_{n\geq 1}$
ما هو الشرط الواجب إضافته لتتحقق العلاقة: $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)$ بعد إيجاد طرفيها ؟ و ماذا تسمى هذه الخاصة بالنسبة للقياس μ ؟

7) احسب تكامل ليبيغ للدالة الثابتة: $w(x)=C$ على المجموعة : $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right[\right\}$
بعد التأكد من وجوده، و ما هو التغير الكلي للدالة الثابتة على فترة مثل $[-1,10]$ ؟ .

8) اكمل ما يلي (بدون حلول):

$a)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{p}}=\ldots;\ p\neq 1 \quad , b)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\ldots \quad , c)\overset{1}{\underset{0}{V}}(\varphi)=\ldots$

$d)\overset{1}{\underset{0}{V}}(|\varphi|)=\ldots \quad , e)\ J=(S)\int_a^b f(x)\,d\,g(x)=\ldots$

حيث φ دالة ديريخليه على $[0,1]$ و المعرفة بالشكل

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 ; & x\in[0,1]\cap\tilde{Q}\\ -1 ; & x\in[0,1]\cap Q\end{cases}$$

و حيث الدالة g تاخذ قيماً ثابتة على الفترة $[a,b]$ و f مستمرة عليها .

انتهت الأسئلة

حمص في 2015/2/12

مدرس المقرر: د. محمد عامر

تمنى لكم بالنجاح

توزيع درجات مقرر الدوال محدودة التغير

الامتحان الفصل الأول $\frac{2014}{2015}$ الدرجة 100

السنة الثالثة - رياضيات

س1 (36 د)

(1) إثبات أن الدالة f المستمرة مطلقاً ذات تغير محدود على [a,b]: ليكن $\varepsilon=1$ ، $\exists\, \delta>0$

لأي مجموعة منتهية من الفترات الجزئية غير المتداخلة $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{n}$ تحقق $\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$ (تعريف الاستمرار المطلق) فإن $\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<1$.

نعتبر التجزئة $P=\{a=x_0,x_1,\dots,x_N=b\}$ للفترة [a,b] بحيث $x_k-x_{k-1}<\delta \; ; k=1,2,\dots,N$ لكل فترة $[x_{k-1},x_k]$ للتجزئة P_k يكون $V(f,P_k)\le 1$

وبالتالي: $\bigvee_{x_{k-1}}^{x_k}(f)\le 1 \; ; k=1,2,\dots,N$

$$\bigvee_a^b(f)=\sum_{k=1}^{N}\bigvee_{x_{k-1}}^{x_k}(f)\le\sum_{k=1}^{N}1=N<\infty$$

إذن f ذات تغير محدود على [a,b].

- لا، العكس ليس صحيحاً. مثلاً دالة الصحيح $y=[x]$ ذات تغير محدود على أي فترة [a,b] ولكنها ليست مستمرة مطلقاً (غير مستمرة).

12

(2) إيجاد دالة التغير للدالة $g(x)=\frac{1}{1+x}$; $[0,3]$; الدالة g متناقصة على هذه الفترة

$$\bigvee_0^x(g)=f(0)-f(x)=1-\frac{1}{1+x} \; ; \; 0<x\le 3$$

وبالتالي تكون دالة التغير بالشكل:

$$\mathcal{V}_g(x)=\bigvee_0^x(g)=\begin{cases}1-\frac{1}{1+x} & ; \; 0<x\le 3\\ 0 & ; \; x=0\end{cases}$$

- وهي ذات تغير محدود على [0,3] لأنها متناقصة.
- وهي تحقق شرط ليبشتز:

$$|g(x)-g(y)|=\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|=\left|\frac{y-x}{(1+x)(1+y)}\right|\le\frac{1}{1}|x-y|=|x-y| \; ; \; x,y\in[0,3]$$

- الرسم ⟵

الرسم

y, x, O, $x=-1$

- وهي مستمرة على [0,3] ولكنها غير قابلة ...
- دالة التغير ذات تغير محدود ومستمرة على [0,3] والعكس صحيح.

12

(3) صيغة دالة القفز لدالة f ذات تغير محدود على [a,b] ، المتقطعة:

$$J_f(x)=\begin{cases}0 & ; \; x=a\\ [f(a+0)-f(a)]+\sum_{x_k<x}[f(x_k+0)-f(x_k-0)]+[f(x)-f(x-0)] & ; \; a<x\le b\end{cases}$$

12

يتبع

$\int_a^x g$ [illegible] (a,b) [illegible] }

[illegible] $\varphi(x) = h(x) - \int_a^x g$ [illegible] $[a,b]$ [illegible] $[a,b]$.

---

(12)

س ٤ (36 د) [illegible] $X = \{1, \dots, 4\}$ [illegible] $H = \{\phi, X, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$

[illegible] H [illegible] X [illegible]

$\{1\}^c = X - \{1\} = \{2,3,4\} \notin H$

[illegible] H : $H_1 = \{\phi, X, \{1\}, \{2,3,4\}, \{3\}, \{1,2,4\}, \{1,3\}, \{2,4\}\}$

[illegible] X

*) [illegible] X [illegible]

---

(12)

(5) [illegible] $f(x) = |x+1| = x+1$ [illegible] $[0,3]$ [illegible]

[illegible] $\varphi_g(x)$ [illegible] $[0,3]$ [illegible]

[illegible]

$$S = \int_0^3 f \, d\varphi_g(x) = \int_0^3 f(x) \varphi_g'(x) \, dx = \int_0^3 (x+1) \frac{dx}{(x+1)^2} = [\ln(x+1)]_0^3 = \ln(4)$$

*) [illegible] $u(x)$ [illegible] $(-2,2)$ [illegible]

[illegible] $[-2,2] - \{0\}$ [illegible] $[-2,2]$ [illegible] $\{0\}$ [illegible]

---

(12)

(6) [illegible] $X = \mathbb{R}$, $S = \beta(\mathbb{R})$ [illegible] $\mathbb{R}$ [illegible] $\mathbb{R}$,

[illegible] $\mu(F_1) < \infty$ [illegible] $\mu(F_n) < \infty$ [illegible]

[illegible] F_n [illegible] $F_n \supseteq F_{n+1}$ [illegible] n)

[illegible] $\{F_n\}$ [illegible] $\lim_{n \to \infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{\phi\} = F$, $\lim_{n \to \infty} \mu(F_n) = \infty$

[illegible] $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \mu(\{\phi\}) = 0$ [illegible] $\mu(F_n) < \infty$

*) [illegible]

[illegible] ←

م 1) (28 درجة)

(7) تكامل ليبيغ ، موجود لأن الدالة الثابتة w قياسية ومحدودة على المجموعة E المغلقة والمحدودة إذاً هي مجموعة قياسية ... وقياسها محدود لأنه $\lambda(E)=1$ ، إذاً الدالة ... من ليبيغ على E الشيء من ليبيغ وحسابه كالآتي ، (خواص) ...

(12)

$$I=(L)\int_{E} w(x)\,d\lambda = c\int_{E} d\lambda = c\,\lambda(E) = c\times 1 = c.$$

(8) الإجابة: * ... على الفترة $[-1,10]$.

(16)

a) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{p}} \overset{(p=1)}{=} \frac{1}{n^{p-1}} + p\int_{1}^{n}\frac{[x]}{x^{p+1}}\,dx \quad (p=1)$$

b) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n - \int_{1}^{n}\frac{x-[x]}{x^{2}} + 1$$

c) $\overset{1}{\underset{0}{V}}(\varphi)=\infty$, d) $\overset{1}{\underset{0}{V}}(|\varphi|)=0$ (دالة ثابتة)

حيث φ دالة ديريخليه على $[0,1]$.

e) $$J=(S)\int_{a}^{b} f(x)\,dg(x) = f(a)\left[g(a+0)-g(a)\right] + \sum_{k=1}^{m} f(c_k)\left[g(c_k+0)-g(c_k-0)\right] + f(b)\left[g(b)-g(b-0)\right]$$

و f ... على $[a,b]$.

أستاذ المقرر
د. محمد ...

دعواتي بالتوفيق والنجاح

... الدرجات

... 2010/6/20